Landesverband Mathematikwettbewerbe NRW e. V.
22. Landeswettbewerb 2016 in Dortmund
3. Runde der 55. Mathematikolympiade
Aufgaben der Klasse 9

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

Aufgabe 1:

Gegeben sind sieben aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die kleinste dieser Zahlen sei a. Thomas sucht alle Zahlen, die sich als das Produkt zweier verschiedener dieser sieben Zahlen darstellen lassen.

a) Ermittle, wie viele Zahlen sich so darstellen lassen, wenn $a = 2$ ist.
Hinweis: Terme der Form $a \cdot b$ und $b \cdot a$ – möglicherweise auch noch andere Terme – liefern das gleiche Produkt. Es sollen nur die verschiedenen Produkte gezählt werden, nicht die verschiedenen Möglichkeiten für die Entstehung dieser Produkte.

b) Thomas wählt nun nur diejenigen Produkte aus, in denen beide Faktoren den ersten drei Zahlen der Folge entstammen. Die Summe dieser Produkte sei S. Danach wählt er nur diejenigen Produkte aus, deren beide Faktoren den drei größten Zahlen der Folge entstammen. Die Summe dieser Produkte sei T. Thomas stellt fest, dass $T - S = 2016$ gilt.
Zeige, dass durch diese Feststellung über S und T die gegebenen Zahlen eindeutig bestimmt sind, und ermittle für diesen Fall die Zahl a.

Aufgabe 2:

Wir betrachten ein Siebeneck $ABCDEFG$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Eckpunkte A, B, …, G liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis.
(2) Die Seiten des Siebenecks sind gleich lang.

a) Berechne die Größen der Innenwinkel des Siebenecks.

b) Beweise, dass das Viereck $BCFG$ ein gleichschenkliges Trapez ist, und berechne die Größen der Innenwinkel des Trapezes $BCFG$.

c) Berechne die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ADE.

Aufgabe 3:

Georg hat 55 gleich große Bälle, von denen einige blau sind und die übrigen rot. Außerdem hat er 10 Kisten; in die erste Kiste passt genau ein Ball, in die zweite Kiste passen genau zwei Bälle usw.

Er möchte nun alle Bälle in Kisten verstauen, wobei in keiner Kiste Bälle unterschiedlicher Farbe vorkommen sollen.

Zeige, dass dies stets möglich ist.

Aufgabe 4:

Ermittle alle positiven ganzzahligen Lösungen der Ungleichung

$$\frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-6} < \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-7}\,.$$