Landesverband Mathematikwettbewerbe NRW e. V.

22. Landeswettbewerb 2016 in Dortmund

3. Runde der 55. Mathematikolympiade

Aufgaben der Klasse 10 / EF

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

Aufgabe 1:

Gegeben sind sieben aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die kleinste dieser Zahlen sei a. Thomas sucht alle Zahlen, die sich als das Produkt zweier verschiedener dieser sieben Zahlen darstellen lassen.

a) Ermitteln Sie, wie viele Zahlen sich so darstellen lassen, wenn $a = 2$ ist.
Hinweis: Terme der Form $a \cdot b$ und $b \cdot a$ – möglicherweise auch noch andere Terme – liefern das gleiche Produkt. Es sollen nur die verschiedenen Produkte gezählt werden, nicht die verschiedenen Möglichkeiten für die Entstehung dieser Produkte.

b) Weisen Sie nach, dass in dieser Aufgabe mit einer beliebigen Zahl a stets weniger als 25 verschiedene Produkte entstehen.

c) Thomas wählt nun nur diejenigen Produkte aus, in denen beide Faktoren den ersten drei Zahlen der Folge entstammen. Die Summe dieser Produkte sei S. Danach wählt er nur diejenigen Produkte aus, deren beide Faktoren den drei größten Zahlen der Folge entstammen. Die Summe dieser Produkte sei T. Thomas stellt fest, dass $T - S = 2016$ gilt.
Zeigen Sie, dass durch diese Feststellung über S und T die gegebenen Zahlen eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie für diesen Fall die Zahl a.

Aufgabe 2:

Die Position eines rechteckigen, zwei Meter langen und ein Meter breiten Freigeheges für Kleintiere auf einer Wiese kann durch Anheben an einer Ecke, Drehen um die gegenüberliegende Ecke und nachfolgendes Absetzen geändert werden. Diese Bewegung des Freigeheges sei mit „Eckdrehung“ gemeint.

Wie viele Eckdrehungen sind mindestens nötig, um das Freigehege letztendlich genau um seine Breite (in Richtung derselben) zu verschieben?

Insbesondere soll also jede Ecke des Freigeheges am Ende genau einen Meter von ihrer Ausgangsposition entfernt sein.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungspaare (x, y) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y &= 15\,, \\ y &= x + \sqrt{y}\,. \end{aligned}$$

b) Weisen Sie nach, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= 15\,, \\ y &= x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{y}}}}} \end{aligned}$$

genau ein reelles Lösungspaar (x, y) besitzt.